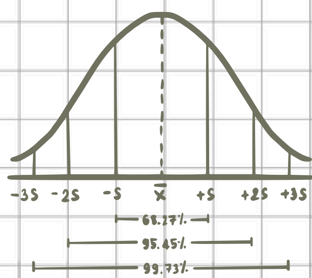
CURSO DE MATEMÁTICA- INGRESO 2025

EJERCICIOS DE APOYO

$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$

$a + 0 = a$



$\mu = \frac{\sum x_i}{n}$

TÉCNICAS DE ESTUDIO

$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{n}$

Universidad Nacional de San Luis
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas y Naturales

$x, y, r, \dots$

MATERIAL ELABORADO POR:

Cuello, Rocio

Foresto, Fiorella

Medina, Erika Yanel

Ortega, Exequiel

Ortiz, Romina Evelin

Rothar, Geraldine

INTRODUCCIÓN

Este material es una recopilación de problemas cuidadosamente seleccionados, diseñados para resolverse con los contenidos abordados a lo largo del curso. Además de reforzar los conceptos aprendidos, estos problemas fomentan el desarrollo de habilidades analíticas y de razonamiento matemático.

El enfoque principal de este material es el Método Polya, un proceso estructurado y ampliamente reconocido para la resolución de problemas matemáticos. Dividido en cuatro pasos fundamentales: **comprender el problema, planificar, ejecutar el plan, y revisar los resultados**, este método no solo mejora la precisión al resolver problemas, sino que también ayuda a los estudiantes a organizar su pensamiento y desarrollar estrategias efectivas.

Entre los beneficios más destacados del Método Polya se encuentran:

- Fomento del pensamiento crítico y lógico.
- Mejora en la capacidad de analizar y descomponer problemas complejos.
- Desarrollo de habilidades para la autoevaluación y corrección de errores.

Este enfoque les permitirá a los estudiantes enfrentar los problemas con confianza y perseverancia, logrando no solo resolverlos, sino también entenderlos profundamente.

PASOS ÚTILES PARA RESOLVER PROBLEMAS: MÉTODO POLYA

A la hora de resolver un problema matemático, seguir un proceso estructurado nos puede llevar al éxito. Uno de los enfoques más conocidos y eficaces es el Método Polya, que divide el proceso en cuatro pasos fundamentales. Vamos a ver cómo aplicarlos y qué se espera en cada uno:

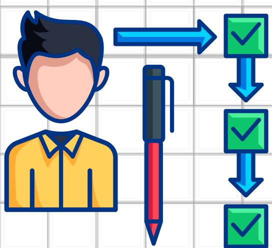
COMPRENDER EL PROBLEMA

Este es el primer paso y el más importante. No podemos empezar a resolver un problema si no lo entendemos bien. Aquí te dejamos algunas estrategias para asegurarnos de que comprendemos el enunciado:

- Leer atentamente el enunciado.
- Identificar los datos y las incógnitas: ¿Qué información nos da el problema? ¿Qué es lo que debemos encontrar?
- Si es necesario, elabora un mapa conceptual o esquema que te ayude a visualizar la situación.
- Dibuja una figura, si el problema lo requiere.
- Asegúrate de entender cómo se relacionan los datos con la incógnita y si necesitas definir alguna notación.

Preguntas claves para guiarte:

- ¿Cuál es la incógnita?
- ¿Cuáles son los datos?
- ¿Cuál es la relación entre los datos y las incógnitas?
- ¿Es suficiente la información que tengo para encontrar la solución? ¿Es insuficiente o contradictoria?



CONCEBIR UN PLAN

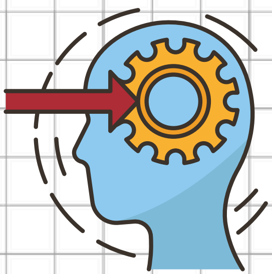
Ahora que comprendes el problema, necesitas un plan para resolverlo. Este paso implica pensar en cómo abordarlo y qué estrategias o técnicas utilizar. Aquí te damos algunos consejos:

Revisa tus conocimientos: ¿Sabes lo suficiente sobre el tema del problema? Si no, busca ejemplos o problemas similares.

- Conéctalo con otros problemas: ¿Has resuelto un problema similar antes? A veces los problemas que ya resolvimos pueden darnos pistas sobre cómo enfrentar el nuevo.
- Si el problema parece complicado, intenta dividirlo en partes más pequeñas o resuelve un problema más sencillo primero.

Preguntas que te ayudarán a concebir un plan:

- ¿He visto un problema parecido antes?
- ¿Qué estrategias puedo usar? (Por ejemplo: dibujar un gráfico, buscar patrones, aplicar fórmulas conocidas).



EJECUTAR EL PLAN

Es hora de poner en práctica el plan que has ideado. Sin embargo, la ejecución no siempre es lineal y perfecta; puede requerir ajustes o cambios sobre la marcha. Aquí algunos puntos para tener en cuenta:

- Verifica cada paso que realices. Asegúrate de que cada uno esté bien justificado.
- Acompaña cada operación matemática con una explicación: ¿Qué haces y por qué?
- Si encuentras alguna dificultad, revisa el plan y vuelve a intentarlo desde otra perspectiva.

EXAMINAR LA SOLUCIÓN OBTENIDA

Finalmente, cuando llegues a una solución, es crucial revisar tu trabajo. Este paso es muchas veces ignorado, pero puede ser clave para detectar errores y asegurar que la respuesta sea correcta.

- Vuelve a leer el enunciado del problema y verifica que la solución obtenida responde a lo que se te pedía.
- Pregúntate: ¿Tiene sentido lógico?
- Considera si existe otra manera de resolver el problema o si podrías mejorar tu respuesta.

SIGUIENDO ESTOS PASOS, LOGRARÁS DESARROLLAR UN MÉTODO EFICAZ PARA RESOLVER PROBLEMAS, INDEPENDIENTEMENTE DE SU DIFICULTAD. ¡RECUERDA QUE RESOLVER PROBLEMAS ES UN PROCESO DE APRENDIZAJE CONTINUO!

PROBLEMA 1-UNIDAD NUMEROS REALES

Un astronauta en un cohete se encuentra en el espacio a una distancia de $x = 3.2 \times 10^5$, kilómetros de la Tierra, mientras que una estación espacial está a una distancia de $y = 1.5 \times 10^5$ kilómetros. Además, la energía potencial entre estos dos objetos es inversamente proporcional a la distancia entre ellos, y está dada por la fórmula:

$$E = \frac{k}{|x - y|^2}$$

Donde ***k*** es una constante que depende de las masas y otras características de los cuerpos, y es la distancia absoluta entre el cohete y la estación.

a) ¿Cuál es la distancia en kilómetros entre la nave y la estación espacial?

b) Usando la formula dada, calcula la energía potencial ***E*** si $k = 9,8 \times 10^7$

RESOLUCIÓN

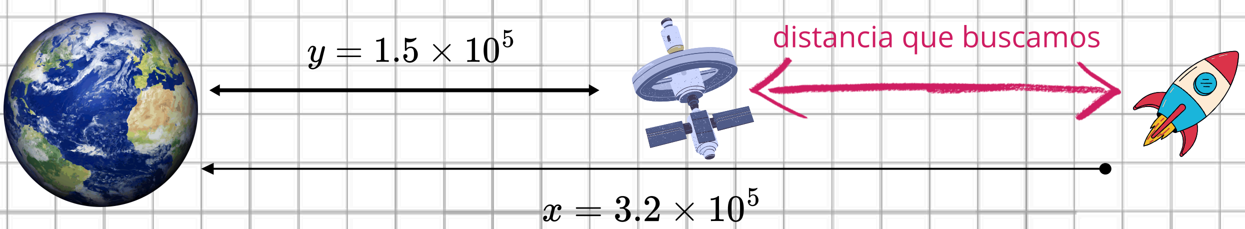
1 COMPRENDER EL PROBLEMA

Para comenzar, es fundamental entender qué se nos pide y cuáles son los datos que tenemos. El problema nos habla de que tenemos dos objetos en el espacio a diferentes distancias de la Tierra: un cohete y una estación espacial.

Identificamos los **datos** y la **notación** que nos provee el problema:

- Un astronauta en un cohete está a una distancia de $x = 3.2 \times 10^5$ kilómetros de la Tierra.
- Una estación espacial está a una distancia de $y = 1.5 \times 10^5$ kilómetros de la Tierra.

Realizamos un **dibujo** de esta situación:



- La energía potencial ***E*** entre estos dos objetos se describe mediante la fórmula: $E = \frac{k}{|x - y|^2}$

Donde:

- ***k*** es una constante que depende de las masas de los cuerpos.
- $|x - y|$ es la distancia absoluta entre el cohete y la estación espacial.

Subpreguntas:

a) ¿Cuál es la distancia en kilómetros entre el cohete y la estación espacial?

b) ¿Cuál es la energía potencial ***E*** si $k = 9,8 \times 10^7$?

2 CONCEBIR UN PLAN

Ahora que hemos comprendido el problema necesitamos idear un plan para resolver las preguntas que nos planteamos. Nuestra tarea es determinar la distancia entre el cohete y la estación espacial para luego calcular la energía potencial entre ellos utilizando la fórmula que involucra dicha distancia. Es decir:

a) Para encontrar la distancia entre el cohete y la estación espacial, necesitamos calcular el valor absoluto de la diferencia entre ***x*** e ***y***, es decir:

$$|x-y| = \left|3.2\times 10^5 - 1.5\times 10^5\right|$$

b) Una vez que tengamos la distancia $|x-y|$, podemos sustituir este valor en la fórmula de la energía potencial y calcular ***E***, usando el valor dado de $k = 9,8\times 10^7$

3 EJECUTAR EL PLAN

a) Calcular la distancia entre la nave y la estación espacial:
Primero, restamos las distancias de los dos objetos respecto a la Tierra:

$$|x-y| = |3.2\times 10^5 - 1.5\times 10^5|$$

Aquí se trabaja con números grandes en notación científica. Al restar estas cantidades, es importante manejar correctamente las potencias de 10. Cuando restamos números en notación científica con la misma potencia de 10, estamos, de hecho, sacando factor común. Aquí, el factor común es la potencia de 10^5.

$$\left|(3.2-1.5)\times 10^5\right| = \left|1.7\times 10^5\right| = 1.7\times 10^5 kilometros$$

Por lo tanto, la distancia entre el cohete y la estación espacial es 1.7×10^5 kilómetros.

b) Calcular la energía potencial
Ahora, sustituimos $|x-y| = 1.7\times 10^5$ y $k = 9,8\times 10^7$ en la fórmula de la energía potencial:

$$E = \frac{k}{|x-y|^2} = \frac{9.8\times 10^7}{\left(1.7\times 10^5\right)^2}$$

Debemos calcular el denominador y tenemos dos maneras distintas de hacerlo:
<u>Método 1</u>: Por definición y propiedad de potencia, se puede calcular resolviendo

$$\left(1.7\times 10^5\right)\times\left(1.7\times 10^5\right) = 2.89\times 10^{10}$$

<u>Método 2</u>: Utilizando la propiedad distributiva de la potenciación

$$(1.7\times 10^5)^2 = (1.7)^2\times\left(10^5\right)^2 = 2.89\times 10^{10}$$

Ahora sustituimos este valor en la fórmula:

$$E = \frac{9.8 \times 10^7}{2.89 \times 10^{10}}$$

Notemos que tenemos dos números en notación científica divididos, podemos aplicar una de las propiedades de la potencia, particularmente *cociente de potencias de igual base* (en este caso, la base es 10), que establece que, cuando dividimos potencias con la misma base, simplemente restamos los exponentes:

$$\frac{10^7}{10^{10}} = 10^{-3}$$

Luego, la división se simplifica como:

$$\frac{9.8}{2.89} 10^{-3} \approx 3,39 \times 10^{-3}$$

Finalmente, la energía potencial es de aproximadamente 3.39×10^{-3} unidades de energía.

4 EXAMINAR LA SOLUCIÓN OBTENIDA

Verificar las respuestas obtenidas:

- Distancia (inciso **a**): Calculamos la distancia entre el cohete y la estación espacial como

$$|x - y| = 1.7 \times 10^5 km$$

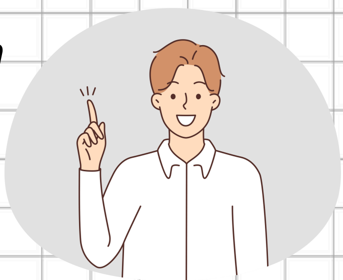
Este resultado parece razonable ya que ***x*** e ***y*** son distancias desde la Tierra, y ***x*** es mayor que ***y***, por lo que la resta y el valor absoluto tienen sentido.

Energía potencial (inciso **b**):

- La energía potencial calculada fue 3.39×10^{-3} aproximadamente.
- Para asegurarnos de que este valor tiene sentido, recordemos que la energía potencial debería ser un valor positivo y que es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. Dado que $|x - y|$ fue positivo, ***E*** también debe ser positivo, lo cual es correcto.

Finalmente, podemos decir:

Respuesta (a): La distancia entre la nave y la estación espacial es de $1.7 \times 10^5 kilometros.$



Respuesta (b): La energía potencial es de 3.39×10^{-3}.

PROBLEMA 2- UNIDAD DE FACTORIZACIÓN

Cada semana un campo cuadrado de cierto parque estatal es podado alrededor de los bordes. El resto del campo se mantiene sin podar para que sirva como hábitat para aves y animales pequeños. El campo mide ***b*** pies por ***b*** pies, y la franja podada es de ***x*** pies de ancho.

a) Explique por qué el área de la parte podada es $b^2-(b-2x)^2$
b) Factorice la expresión de la parte **a)** para demostrar que el área de la parte podada también es $4x\,(b-x)$.

RESOLUCIÓN

1 COMPRENDER EL PROBLEMA

Para comenzar, es fundamental entender qué se nos pide y cuáles son los datos que tenemos. Tenemos un campo cuadrado de ***b*** pies por ***b*** pies, y cada semana se poda una franja de ***x*** pies de ancho alrededor de los bordes del campo.

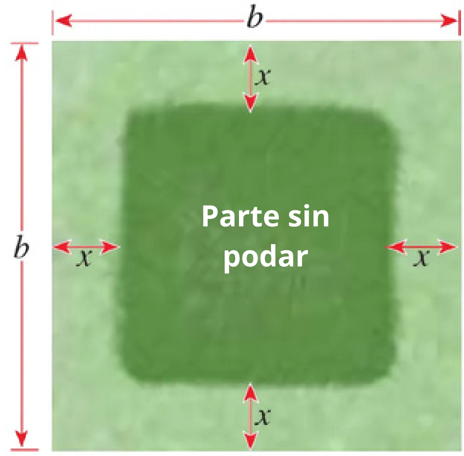
Datos del problema:

- El lado del campo es de ***b*** pies.
- La franja podada tiene un ancho de ***x*** pies.
- El área de la parte podada se expresa como $b^2-(b-2x)^2$

Se nos pide:

- Demostrar que el área de la parte podada es $b^2-(b-2x)^2$
- Factorizar $b^2-(b-2x)^2$ para demostrar que es igual a $4x\,(b-x)$.

Realizamos un **dibujo** de esta situación:



2 CONCEBIR UN PLAN

Inciso a):
Para la primera parte, vamos a utilizar áreas que es posible identificar en la figura. El área total del campo es b^2, y la parte que no ha sido podada es un cuadrado más pequeño de lado $b-2x$ (descontamos ***x*** pies de cada lado). Por lo tanto, para encontrar el área de la franja podada, debemos restar el área de la parte central no podada del área total del campo.

Inciso b):
Para la segunda parte, utilizaremos las fórmulas especiales, en particular la de *diferencia de cuadrados,* para factorizar $b^2-(b-2x)^2$, y así obtener la expresión factorizada que se nos pide.

3 EJECUTAR EL PLAN

a): Demostración del área de la parte podada

El área total del campo es b^2 porque el campo es un cuadrado de lado b.
El área de la parte no podada es también un cuadrado, pero con un lado más corto, ya que hemos podado ***x*** pies de cada lado. Esto deja un cuadrado con lado $b-2x$. El área de la parte no podada es entonces:

$$(b-2x)^2$$

Por lo tanto, el área de la franja podada es la diferencia entre el área total del campo y el área de la parte no podada:

$$\text{Área podada} = b^2-(b-2x)^2$$

Esto confirma que el área de la parte podada es: $b^2-(b-2x)^2$

b): Factorización de $b^2-(b-2x)^2$

Ahora, vamos a factorizar la expresión $b^2-(b-2x)^2$ utilizando una de las fórmulas especiales, la *diferencia de cuadrados*, que dice:

$$A^2-B^2=(A-B)(A+B)$$

En este caso, identificamos $A=b$ y $B=(b-2x)$. Entonces podemos escribir:

$$b^2-(b-2x)^2=[b-(b-2x)]\,[b+(b-2x)]$$

Simplifiquemos cada factor:

$$b^2 - (b - 2x)^2 = (b - b + 2x)(b + b - 2x)$$

$$b^2 - (b - 2x)^2 = (2x)(2b - 2x)$$

$$b^2 - (b - 2x)^2 = 2x2(b - x)$$

Por lo tanto, la expresión factorizada es:

$$b^2 - (b - 2x)^2 = 4x(b - x)$$

De esta manera, hemos demostrado que el área de la parte podada también se puede expresar como $4x(b - x)$.

4 EXAMINAR LA SOLUCIÓN OBTENIDA

Finalmente, revisamos si nuestra solución tiene sentido y si el resultado final es coherente.

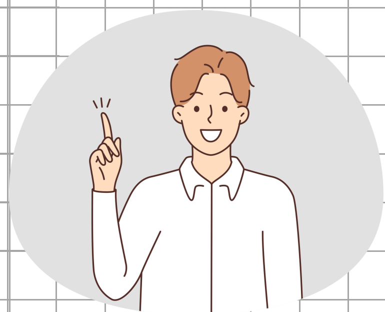
- Para la parte **a)**, la diferencia de áreas fue correctamente calculada como $b^2 - (b - 2x)^2$, lo que tiene sentido, ya que resta el área de la parte no podada de la totalidad del campo.
- Para la parte **b)**, utilizamos correctamente la formula especial de diferencia de cuadrados para factorizar y demostramos que la expresión es equivalente a $4x(b - x)$.

Ambas expresiones son correctas, y la factorización es válida. Además, el resultado tiene un significado claro: el área podada depende tanto del ancho de la franja ***(x)*** como del tamaño restante del lado del campo después de la poda $(b - x)$.

Finalmente, podemos decir:

Respuesta (a): ***El área de la parte podada es*** $b^2 - (b - 2x)^2$ ***ya que resta el área de la parte no podada de la totalidad del campo.***

Respuesta (b): $b^2 - (b - 2x)^2 = 4x(b - x)$



PROBLEMA 3-UNIDAD ECUACIONES LINEALES

Una compañía que alquila vehículos establece sus tarifas para camiones de la siguiente manera: cobra $65 USD por cada día de alquiler y $2 USD por cada kilómetro recorrido.
Miguel alquiló un camión durante 3 días, y el total de su factura fue de $275 USD. ¿Cuántos kilómetros recorrió Miguel con el camión?

RESOLUCIÓN

1 COMPRENDER EL PROBLEMA

A partir de la lectura del enunciado, podemos entender que el contexto trata del alquiler de vehículos. Por lo tanto, identificamos los siguientes **datos** importantes:

Datos del problema:

- El alquiler de un camión durante 3 días costó un total de $275 usd.
- Por otro lado, sabemos que la compañía cobra:

--> $65 usd por día por día alquilado.
--> $2 usd adicionales por kilometro recorrido.

Algo importante a tener en cuenta, es que, como estamos hablando de dinero, es importante que trabajemos siempre con la misma unidad de medida. En este caso trabajaremos con dólares, pero podríamos haber elegido trabajar en pesos. Lo mismo si observamos las unidades de medida para la distancia recorrida, en este caso se trabajará en kilómetros.

Incógnita:
Además de los datos, podemos identificar la incógnita del problema, a partir de la pregunta que aparece al final del enunciado. Es decir, lo que queremos hallar es el número de kilómetros que recorrió Miguel. Por lo tanto, vamos a representar ese valor con la letra ***k*** y esa será la incógnita a hallar.

k : número de kilómetros que recorrió Miguel

2 CONCEBIR UN PLAN

Como siguiente paso, podemos expresar los datos identificados anteriormente, en términos de la incógnita ***k***. Como dichas expresiones representarán lo que cobra la compañía por el total de días que Miguel alquiló el vehículo, y lo que cobra por el total de kilómetros recorridos, al sumar dichas expresiones podemos igualarlas al total que la empresa cobró. De esta manera tendremos una ecuación y por lo tanto al resolverla hallaremos la respuesta que buscamos.

3 EJECUTAR EL PLAN

Sabemos que la compañía le cobró a Miguel \$2 usd por kilómetro recorrido. Como él recorrió un total de ***k*** kilómetros, la compañía le cobró en parte:

$$2k \quad \textbf{(*)}$$

Por otro lado, la empresa cobra \$65 usd el día de alquiler y se sabe además que fue por 3 días. Por lo que la compañía le cobro:

$$3\,(65) = 195 \quad \textbf{(**)}$$

A partir del dato identificado, sabemos que la compañía le cobró a Miguel un total de \$275 usd por alquilar el vehículo durante tres días. Es decir que la suma de **(*)** y **(**)**, es igual a 275. En términos de ecuaciones esto resulta ser:

$$2k + 195 = 275$$

Hemos obtenido una ecuación lineal, por lo que para poder resolverla aplicaremos las propiedades de la igualdad:

$$2k + 195 - 195 = 275 - 195$$

Para ello restamos 195 en ambos miembros de la ecuación:

$$2k = 80$$

Multiplicamos por $\frac{1}{2}$ (que es un número diferente de cero) en ambos miembros:

$$\frac{1}{2}2k = 80\frac{1}{2}$$

Simplificando, obtenemos:

$$k = 40$$

4 EXAMINAR LA SOLUCIÓN OBTENIDA

Para asegurarnos que la solución obtenida en el paso anterior es correcta, verificaremos la misma en la ecuación original $2k+195=275$, reemplazando $k=40$.
Si se cumple la igualdad, significa que la solución efectivamente es correcta. Si la igualdad no se cumple, tendremos que volver hacia atrás, revisando la resolución de la ecuación o el planteo de la misma, ya que algo habremos hecho mal.

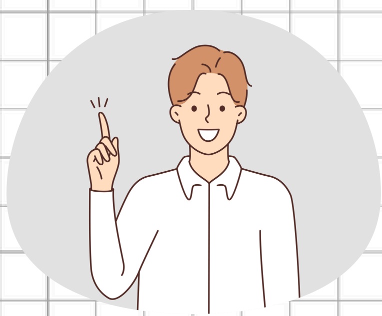
$$2\,(40)+195=275$$

$$80+195=275$$

$$275=275$$

Como la igualdad es correcta, verificamos que es la solución del problema. Finalmente podemos dar respuesta a la pregunta del ejercicio diciendo que:

<u>Respuesta</u>**: Miguel recorrió en total 40 kilómetros.**



PROBLEMA 4 - UNIDAD ECUACIONES CUADRÁTICAS

Suponga que un cuerpo se deja caer desde una altura h_0 sobre el suelo. Entonces su altura después de t segundos está dada por $h = -16t^2 + h_0$
donde h se mide en pies. Use esta información para resolver el problema:
Una pelota se deja caer desde lo alto de un edificio de 96 pies de alto.
a) ¿Cuánto tardará la pelota en caer la mitad de la distancia al nivel del suelo?
b) ¿Cuánto tardará en caer el suelo?

RESOLUCIÓN

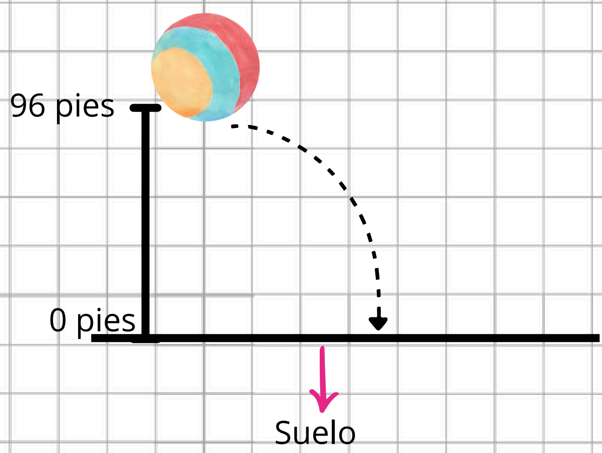
1 COMPRENDER EL PROBLEMA

De acuerdo con lo leído en el enunciado del problema, podemos notar que trata sobre la caída de un objeto, en este caso una pelota, desde una cierta altura.
Del mismo podemos extraer el siguiente **dato**:

- La pelota se deja caer desde una altura de 96 pies. Esto quiere decir que la altura $h_0 = 96$

Entonces, como ya conocemos cuál es la altura h_0 , podemos decir que, la ecuación que representa la caída de esta pelota es: $h = -16t^2 + 96$

Algo que siempre ayuda a la hora de resolver este tipo de problemas, es realizar un esquema de como se está comportando la trayectoria del objeto que cae. En este caso, en la siguiente figura hemos representado la trayectoria de la pelota cayendo desde una altura inicial de 96 pies.



2 CONCEBIR UN PLAN

Ahora que ya hemos analizado los datos, procedemos a responder las consignas.

En el inciso **a)**, se pregunta cuánto tardará la pelota en caer la mitad de la distancia al nivel del suelo, es decir, cuánto tardará la pelota en llegar a la mitad de 96. (ya que la pelota se cae desde un altura de 96 pies).

Entonces para poder responder a esta pregunta resolveremos la ecuación:

$$\frac{96}{2} = -16t^2 + 96$$

En el inciso **b)**, se pregunta cuanto tardaría la pelota en llegar al suelo. Por lo que en ese caso, sabemos que la pelota se encuentra a 0 pies respecto del suelo. Es decir ***h*** es igual a 0. Entonces, reemplazando ***h=0*** en la fórmula, tenemos:

$$0 = -16t^2 + 96$$

3 EJECUTAR EL PLAN

Resolvemos el ítem a)
Anteriormente ya se menciono que para dar respuesta a este ítem se resolvería la ecuación

$$\frac{96}{2} = -16t^2 + 96$$

Para resolver esta ecuación, lo primero que hacemos es restar 96 en ambos miembros.

$$\frac{96}{2} - 96 = -16t^2 + 96 - 96$$

Simplificando, obtenemos:

$$-48 = -16t^2$$

Luego, divido por -16 en ambos miembros:

$$\frac{-48}{-16} = \frac{-16}{-16}t^2$$

Simplificando, obtenemos: $3 = t^2$

$$\sqrt{3} = \sqrt{t^2}$$

Aplico raíz cuadrada en ambos miembros:

$$\pm\sqrt{3} = t$$

De lo anterior se obtiene que las soluciones a la ecuación son:

$$-\sqrt{3} = t_1 \qquad \sqrt{3} = t_2$$

Se puede observar que se han obtenidos dos valores que son solución a la ecuación. Entonces, dado que no se puede hablar de tiempo negativo, la solución

$$-\sqrt{3} = t_1$$

no puede ser considerada. De esta forma, realizando una aproximación de la solución t_2 diremos que la pelota tardará aproximadamente 1,73 segundos en caer la mitad de la distancia al nivel del suelo.

Resolvemos el ítem b)

Como ya se había mencionado en la etapa 2 del análisis del problema, para dar respuesta a este ítem, se resolverá la ecuación:

$$0 = -16t^2 + 96$$

Para resolver esta ecuación aplicaremos la fórmula cuadrática : $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Primero identificamos cuánto vale ***a**, **b**,* y ***c***. En este caso tenemos que:

$$a = -16, b = 0, c = 96$$

Luego, reemplazamos los datos en la formula cuadrática como sigue:

$$t_{1,2} = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4\,(-16)96}}{2\,(-16)}$$

$$t_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{6144}}{-32}$$

De lo realizado anteriormente, obtenemos las siguientes soluciones:

$$t_1 = \frac{+\sqrt{6144}}{-32} \qquad t_2 = \frac{-\sqrt{6144}}{-32}$$

O bien:

$$t_1 = -\frac{\sqrt{6144}}{32} \qquad t_2 = \frac{\sqrt{6144}}{32}$$

Nuevamente, obtenemos dos soluciones distintas que satisfacen la ecuación. Pero dado que no se puede hablar de tiempo negativo, la solución:

$$t_1 = -\frac{\sqrt{6144}}{32}$$

no puede ser considerada. De esta forma, realizando una aproximación de la solución t_2 , diremos que la pelota tardará aproximadamente 2,44 segundos en llegar al suelo.

4 EXAMINAR LA SOLUCIÓN OBTENIDA

Por último, verificaremos si la solución que hemos considerado para responder las preguntas de los incisos **a)** y **b)** son correctas.

Verificamos la solución obtenida en el ítem a)

Para poder hacer esto, vamos a reemplazar $t_2 = \sqrt{3}$ en la ecuación que representa la trayectoria de la pelota. En caso de que no se verifique la igualdad, debemos volver hacia atrás e identificar qué error hemos cometido.

$$h = -16(\sqrt{3})^2 + 96$$

$$h = -16\,(3) + 96$$

$$h = -48 + 96$$

$$h = 48$$

Como la mitad de 96 pies es igual a 48 pies, significa que el tiempo encontrado para el ítem **a)** es correcto.

Verificamos la solución obtenida en el ítem b)

Ahora realizamos el mismo procedimiento, pero en este caso reemplazamos el valor $\frac{\sqrt{6144}}{32}$ en la ecuación:

$$h = -16\left(\frac{\sqrt{6144}}{32}\right)^2 + 96$$

$$h = -16\left[\frac{\left(\sqrt{6144}\right)^2}{32^2}\right] + 96$$

$$h = -16\left(\frac{6144}{1024}\right) + 96$$

$$h = -16\,(6) + 96$$

$$h = -96 + 96$$

$$h = 0$$

Dado que el suelo representa la altura cero. Podemos asegurar que la respuesta obtenida para el ítem **b)** es correcta.

Finalmente respondemos que:

<u>Respuesta (a):</u> La pelota tardará aproximadamente 1,73 segundos en caer la mitad de la distancia al nivel del suelo.

<u>Respuesta (b):</u> La pelota tardará aproximadamente 2,44 segundos en llegar al suelo.

PROBLEMA 5 - UNIDAD RECTAS

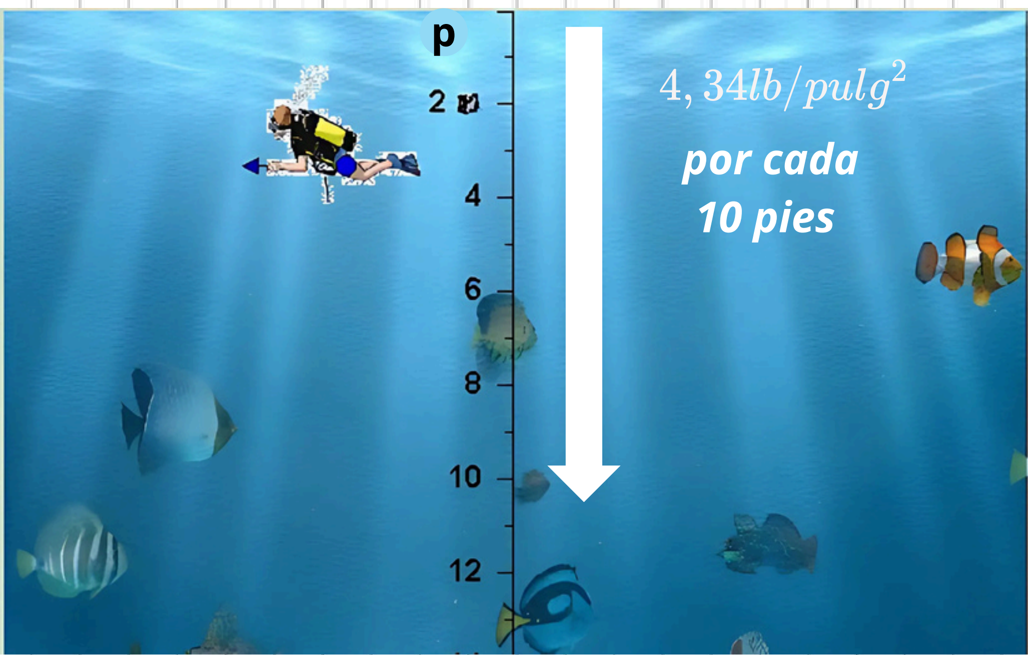
En la superficie del océano, la presión del agua es igual a la presión atmosférica, $15lb/pulg^2$ aproximadamente. A medida que se desciende, esta presión aumenta en $4,34lb/pulg^2$ por cada 10 pies de profundidad. Se necesita estudiar como varia la presión con la profundidad y determinar a qué profundidad sería de $100lb/pulg^2$

RESOLUCIÓN

1 COMPRENDER EL PROBLEMA

Primero, debemos comprender que nos pide el problema y que información tenemos disponible (**datos**):

- La presión en la superficie del océano es igual a la presión del aire, es decir, $15lb/pulg^2$
- La presión del agua aumenta en $4,34lb/pulg^2$ por cada 10 pies de profundidad.



Representación gráfica de la situación

Preguntas a resolver:

- Queremos encontrar una expresión matemática que relacione la presión en función de la profundidad.
- Luego, necesitamos usar esta relación para calcular la profundidad en la que la presión alcanza un valor específico, en este caso, $100lb/pulg^2$

2 CONCEBIR UN PLAN

Para planificar, pensemos en los conceptos matemáticos que necesitamos y los pasos a seguir.

Concepto clave: Sabemos que la presión aumenta de ***forma lineal*** con la profundidad, lo cual indica que una ***ecuación lineal*** puede ser útil para modelar esta relación. La forma general de una ecuación lineal es:

$$P = mx + b$$

donde ***P*** es la presión, ***x*** es la profundidad, ***m*** es la tasa de cambio de presión por pie de profundidad (*pendiente*), y ***b*** es la presión inicial en la superficie.

Es decir que debemos:

1) Calcular la pendiente ***m***, que representa el incremento de presión por cada pie de profundidad.

2) Usar el dato de la presión en la superficie para ***b***.

3) Construir la ecuación de muestre la relación entre la presión y la profundidad.

4) Resolver esta ecuación para encontrar la profundidad dado que la presión es de $100lb/pulg^2$

3 EJECUTAR EL PLAN

1) <u>Calcular la pendiente *m*</u>

Dado que la presión aumenta $4,34lb/pulg^2$ por cada 10 pies, podemos calcular la tasa de cambio por pie

$$m = \frac{4,34lb/pulg^2}{10pies} = 0,434$$

Esta pendiente nos dice que, por cada pie que descendemos, la presión aumenta $0,434lb/pulg^2$

2) <u>Determinar b</u>

En la superficie $x = 0$ la presión es $15lb/pulg^2$. Esto significa que $b = 15$

3) <u>Construir la ecuación</u>

Dado que ya contamos con el valor de la pendiente y el valor de la ordenada, la ecuación que relaciona la presión ***P*** y la profundidad ***x*** es:

$$P = 0,434x + 15$$

4) <u>Resolver la ecuación</u>

Para saber a qué profundidad se alcanza esta presión, igualamos ***P*** a $100lb/pulg^2$ y resolvemos para ***x:***

$$100 = 0,434x + 15$$

Para empezar a resolver vamos a restar 15 de ambos lados de la igualdad y resulta:

$$100 - 15 = 0,434x + 15 - 15$$

$$85 = 0,434x$$

Ahora, dividimos ambos lados de la ecuación entre 0,434 para despejar ***x***:

$$\frac{85}{0,434} = \frac{0,434}{0,434}x$$

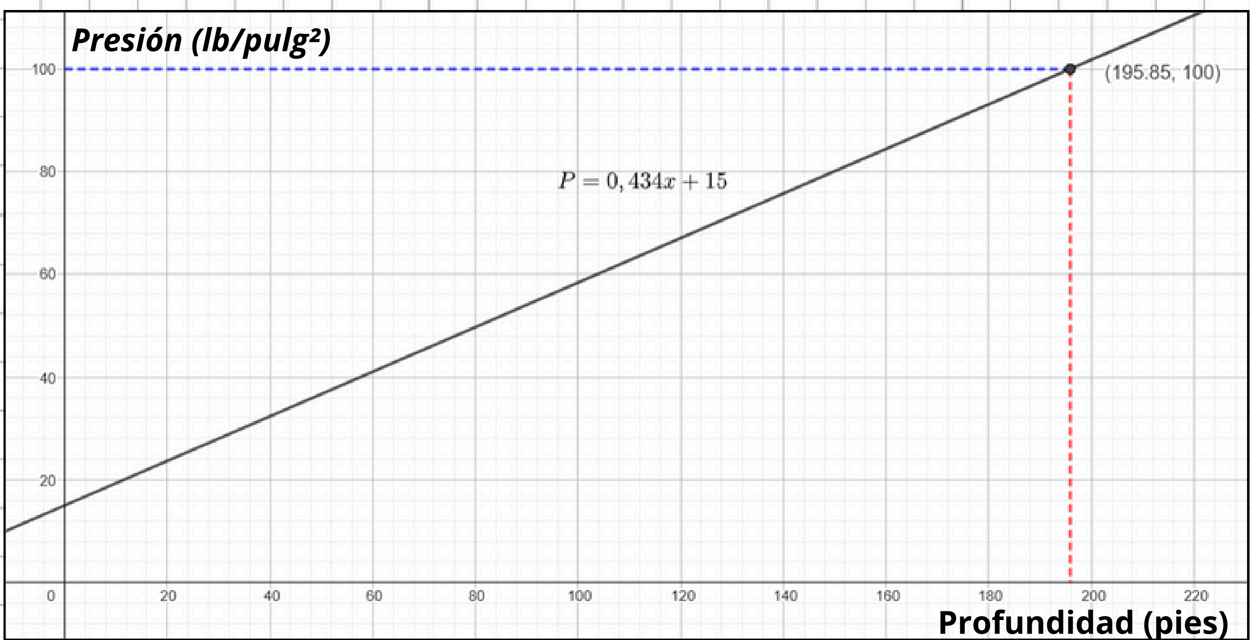
Finalmente, haciendo la división:

$$195,85 \approx x$$

4 EXAMINAR LA SOLUCIÓN OBTENIDA

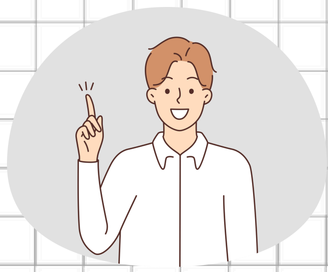
Vamos a graficar la relación entre la presión y la profundidad para verificar nuestra solución. La ecuación $P = 0.434x + 15$ se puede graficar para ver como varia la presión con la profundidad.

En el siguiente gráfico se representa la relación entre la presión y la profundidad en pies:



Al observar el grafico, podemos ver que la intersección entre la recta negra y la roja ocurre aproximadamente a la profundidad de 195.85 pies, lo que confirma nuestra solución calculada.

Finalmente podemos responder que:



Respuesta**: La profundidad x a la que la presión es de** $100lb/pulg^2$ ***es aproximadamente 195,85 pies***

PROBLEMA 6 – UNIDAD RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES

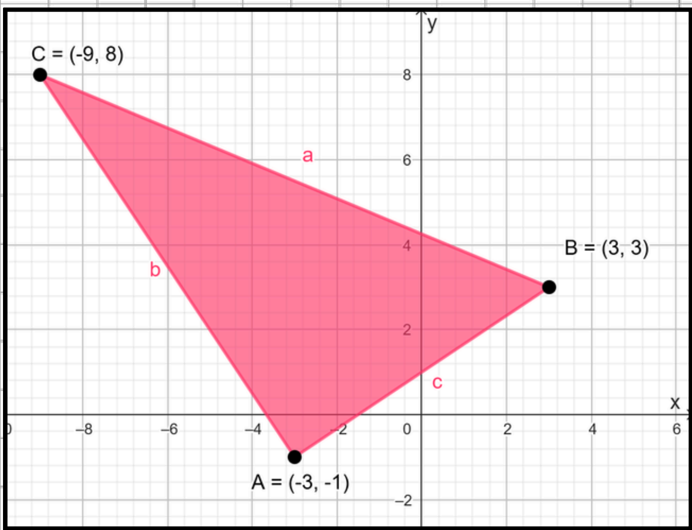
Dado un triángulo que tiene los puntos A(-3,-1) , B(3,3) y C(-9,8) como vértices. ¿Como podríamos determinar que éste es un triángulo rectángulo?

RESOLUCIÓN

1 COMPRENDER EL PROBLEMA

Primero, debemos comprender que nos pide el problema y que información tenemos disponible (**datos**):

- Tenemos las coordenadas de los tres vértices que forman el triángulo.
- Llamamos **a** al lado opuesto al vértice **A**, **b** al lado opuesto al vértice **B** y **c** al lado opuesto al vértice **C**.



Representación gráfica de la situación en GeoGebra

Pregunta a resolver:
El triángulo formado por esos vértices, ¿es rectángulo?

2 CONCEBIR UN PLAN

Para planificar la resolución, pensemos en los conceptos matemáticos que necesitamos y los pasos a seguir.

Concepto clave: Debemos tener presente que un triángulo es rectángulo, si tiene un ángulo de 90° o en otras palabras, los lados que forman el ángulo de 90° deben ser perpendiculares.

Observando el triángulo que hemos graficado, “pareciera” que el ángulo de 90° del triángulo está sobre el vértice **A**.

Entonces podríamos considerar las rectas que contienen a los lados **b** y **c** del triángulo, y probar que dichas rectas son perpendiculares. Por lo tanto, para poder llevar a cabo este plan, deberíamos calcular las pendientes de cada una de dichas rectas, y luego utilizar la *definición de rectas perpendiculares* para comprobar si verifican o no.

Para ello, vamos a definir las siguientes notaciones:

- Llamamos r_1 a la recta que contiene al lado **b,** y m_1 a la pendiente de dicha recta.
- Llamamos r_2 a la recta que contiene al lado **c**, y m_2 a la pendiente de dicha recta.

3 EJECUTAR EL PLAN

- Calculamos la pendiente m_1 de la recta r_1:

Conocemos dos puntos por los cuales la recta pasa, que son **A(-3,-1)** y **C(-9,8)**.

Reemplazamos las coordenadas de estos puntos en la siguiente fórmula y operando nos queda:

$$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8-(-1)}{-9-(-3)} = \frac{9}{-6} = \frac{-3}{2}$$

Entonces: $$m_1 = \frac{-3}{2}$$

- Calculamos la pendiente m_2 de la recta r_2 :

Conocemos dos puntos por los cuales la recta pasa, que son **A(-3,-1)** y **B(3,3)**.

Reemplazamos las coordenadas de estos puntos en la siguiente fórmula y operando obtenemos:

$$m_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-(-1)}{3-(-3)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Entonces:

$$m_2 = \frac{2}{3}$$

- <u>Verificamos si las rectas cumplen la definición de rectas perpendiculares</u>

De la definición de rectas perpendiculares podemos establecer que si $m_1 . m_2 = -1$ entonces las rectas son perpendiculares.

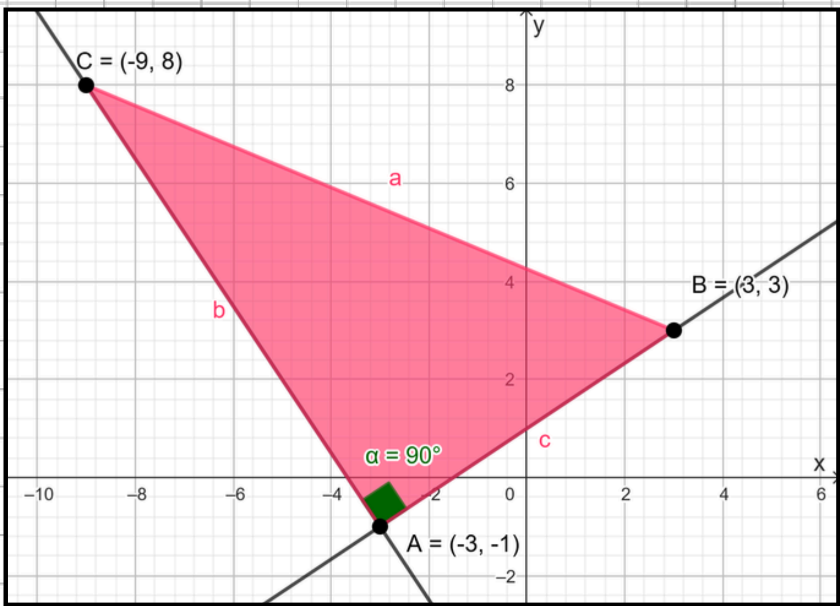
Al multiplicar las pendientes de las rectas, obtenemos:

$$m_1 . m_2 = (\frac{-3}{2})\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{-6}{6} = -1$$

De esta manera, podemos concluir que las rectas que contienen a los lados **b** y **c** del triángulo, son perpendiculares. Esto nos permite asegurar que el triángulo con vértices ***A***, ***B***, y ***C***, es rectángulo.

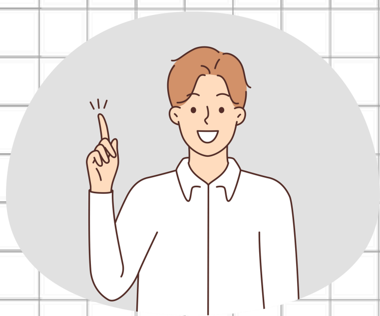
4 EXAMINAR LA SOLUCIÓN OBTENIDA

Por último, podemos examinar la solución obtenida utilizando por ejemplo un software como *GeoGebra* que me permite graficar y además calcular el ángulo entre ambas rectas mencionadas anteriormente.



Finalmente, respondemos que:

<u>Respuesta</u>: Los puntos A(-3,-1) B(3,3) y C(-9,8) determinan los vértices de un triángulo rectángulo.



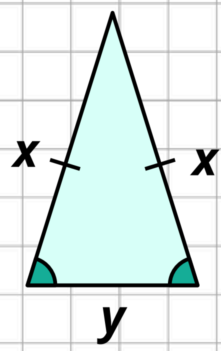
PROBLEMA 7-UNIDAD SISTEMAS DE ECUACIONES

Un lado de un triángulo isósceles mide 3 cm menos que la suma de los dos lados iguales. El perímetro es de 33 cm. ¿Cuánto mide cada lado?

RESOLUCIÓN

1 COMPRENDER EL PROBLEMA

Para comenzar, es fundamental entender qué se nos pide y cuáles son los datos que tenemos. El problema nos habla de un *triángulo isósceles*, lo que significa que *tiene dos lados de igual longitud*. Nuestra tarea es determinar las longitudes de los tres lados del triángulo.



Para ello, introducimos una notación adecuada:

- Llamemos ***x*** a la longitud de cada uno de los lados iguales del triángulo.
- Llamemos ***y*** al lado que es diferente.

A partir del enunciado, identificamos los **datos** importantes:

- Sabemos que el lado desigual es 3 cm más corto que la suma de los dos lados iguales. En términos algebraicos, esto se traduce en la ecuación $y = 2x - 3$
- También sabemos que el perímetro total del triángulo es 33 cm. El perímetro es la suma de los tres lados, lo que nos da la ecuación $2x + y = 3$

2 CONCEBIR UN PLAN

Ahora que hemos comprendido el problema y obtenido dos ecuaciones, necesitamos idear un plan para resolverlas. En este caso, tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Una estrategia eficaz es usar el método de sustitución, ya que en la primera ecuación ya tenemos ***y*** despejada, lo que nos facilita sustituir su valor en la segunda ecuación. Recordemos que las ecuaciones que tenemos son:

$$y = 2x - 3 \quad \text{(Ecuación 1)}$$

$$2x + y = 33 \quad \text{(Ecuación 2)}$$

3 EJECUTAR EL PLAN

Para resolver el sistema mediante sustitución, seguimos los siguientes pasos:

Paso 1: Tomamos la Ecuación 1 $y = 2x - 3$ y sustituimos este valor de y en la Ecuación 2:

$$2x + (2x - 3) = 33$$

Resolvemos la ecuación resultante:

$$2x + 2x - 3 = 33$$

$$4x = 36$$

$$x = \frac{36}{4}$$

$$x = 9$$

Paso 2: Reemplazamos $x = 9$ en la Ecuación 1, para obtener el valor de la variable y

$$y = 2.9 - 3$$

$$y = 15$$

Obtenemos $x = 9$ e $y = 15$, que es la solución matemática del sistema.

4 EXAMINAR LA SOLUCIÓN OBTENIDA

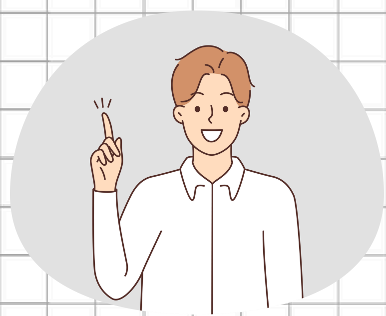
Finalmente, verificamos la solución. Hemos encontrado que los lados iguales miden 9 cm cada uno y el lado desigual mide 15 cm. Comprobemos el perímetro:

$$9 + 9 + 15 = 33cm$$

El perímetro coincide con el valor dado en el enunciado, por lo que la solución es correcta.

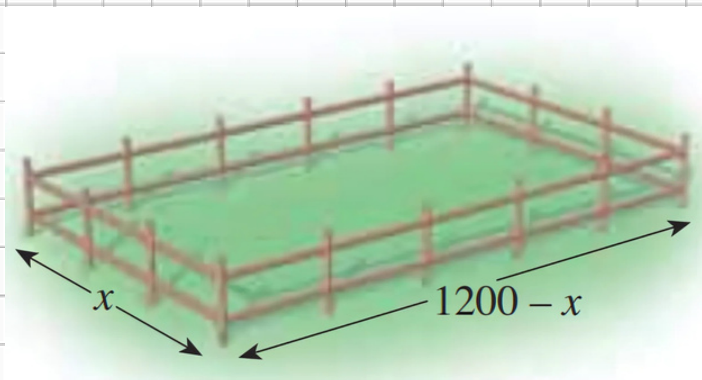
Finalmente, podemos decir:

***Respuesta:* Las longitudes de los lados del triángulo son: 9cm, 9cm y 15cm.**



PROBLEMA 8- UNIDAD FUNCIÓN CUADRÁTICA

Carol dispone de 2400 pies de cerca para construir un corral rectangular para caballos, utilizando todo el material sin que le sobre nada. ¿Cómo podríamos determinar el área del corral en términos del ancho? ¿Cuáles serán las dimensiones del corral para que el área del corral sea la máxima posible?



RESOLUCIÓN

1 COMPRENDER EL PROBLEMA

Primero debemos comprender que nos pide el problema y que información tenemos disponible (datos):

- Para cercar el terreno rectangular, necesita solo 2400 pies de cerca. En decir, su perímetro es de 2400 pies.
- Un lado del terreno mide ***x*** que lo llamaremos ancho; y el otro lado mide ***1200-x*** que será la altura.

En este caso, no hace falta hacer un esquema o representación del problema, porque el mismo enunciado ya nos muestra el terreno con las dimensiones del mismo.

2 CONCEBIR UN PLAN

Ahora que ya hemos analizado los datos, podemos armar un plan:

Primera pregunta:

En la primera nos pregunta como determinar el área del corral en términos del ancho del corral. Para esto deberíamos buscar una función que me exprese al área en términos del ancho que lo llamamos ***x*.**

Dato clave: El área de un rectángulo se calcula multiplicando la ancho por la altura.

Segunda pregunta:

Cuando nos piden hallar las dimensiones, nos están pidiendo ver cuánto mide el ancho y cuánto mide la altura del terreno. Entonces, luego de determinar la función que responda a la **primera pregunta**, debemos ver cómo buscar ese valor máximo.

3 EJECUTAR EL PLAN

Resolvemos la primera pregunta:

Entonces, teniendo en cuenta el dato clave y la representación de la situación, podemos decir que el área del corral en términos del ancho ***x*** es:

$$A(x) = x(1200 - x)$$

Luego, si desarrollamos el producto resulta:

$$A(x) = -x^2 + 1200x$$

Podemos observar que la función encontrada, es una función cuadrática.

Resolvemos la segunda pregunta:

Como encontramos en la pregunta anterior que el área del terreno esta determinado por una función cuadrática, podemos observar que $a < 0$, esto nos asegura que las ramas de la parábola van hacia abajo. Por lo tanto, tiene sentido encontrar el valor máximo que se presenta cuando

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Entonces para empezar a calcular, primero debemos definir quien sería ***a*** y ***b*** en nuestra función cuadrática.

$$a = -1 \qquad\qquad b = 1200$$

Ahora vamos a calcular el valor en la coordenada de ***x***

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{1200}{2(-1)} = 600$$

Entonces, para calcular cuales serán las dimensiones del rectángulo que permitan que el área sea la máxima, utilizaremos esta información.

Hemos encontrado entonces que el máximo de la función se presenta en $x = 600$
Como ya sabemos por los datos del problema que el ancho es ***x***, por lo tanto, para que el área sea la máxima posible, el ancho debe medir 600 pies.

Luego, como el largo mide $1200 - x$, tiene que el largo debe medir:

$$1200 - 600 = 600$$

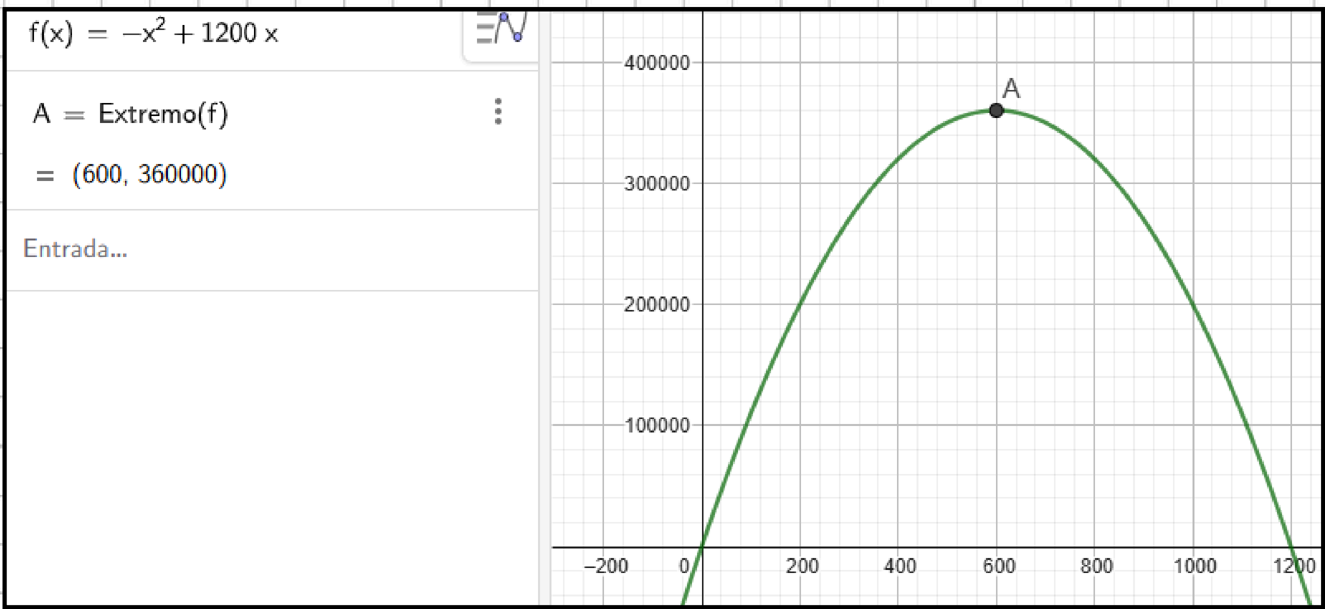
pies, para que el área sea la máxima posible.

4 EXAMINAR LA SOLUCIÓN OBTENIDA

Por último, verificaremos si lo obtenido es correcto, es decir verificaremos si la solución que hemos considerado para responder la pregunta es correcta.

Como el problema pedía maximizar el área, necesitamos que esta función tenga un máximo. Claramente esto se verifica ya que como vimos antes, las ramas de la parábola van hacia abajo, porque $a < 0$

Otra forma de verificar si lo obtenido es correcto, es graficar la función cuadrática en GeoGebra y ver que realmente el vértice se encuentra en ***x = 600:***



También podemos verificar que el área del rectángulo será de 360.000 pies cuadrados, ya que viene de hacer el producto

$$A = 600\,(600) = 360.000$$

Por otro lado, también podemos verificar que las dimensiones son correctas utilizando la información del perímetro del corral.
Para ello, podemos ver si al sumar todos los lados del corral, nos da el perímetro de 2400 pies que nos indica el problema. Sumando las dimensiones de cada lado se obtiene:

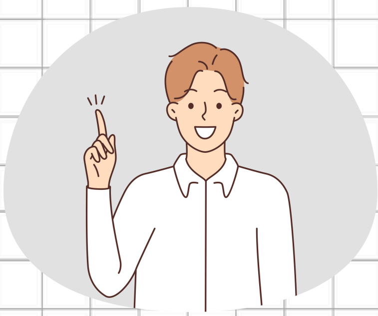
$$P = 2\,(anc) + 2\,(alto)$$
$$P = 2\,(600) + 2\,(600)$$
$$P = 1200 + 1200 = 2400$$

Luego como el perímetro nos da igual a 2400 pies, siendo lo que indicaba el enunciado,, podemos concluir que las dimensiones encontradas son correctas.

Finalmente, estamos en condiciones de responder:

<u>Respuestas</u>:
La función $A\,(x) = -x^2 + 1200x$ ***determina el área del corral en términos del ancho y sus dimensiones son:***

- ***Ancho: 600 pies***
- ***Largo: 600 pies.***



PROBLEMA 9-UNIDAD TRIGONOMETRÍA

Un hombre que está en una playa hace volar una cometa. Sostiene el extremo de la cuerda de la cometa al nivel del suelo y estima que el ángulo de elevación de la cometa es de 50°. Si la cuerda es de 450 pies de largo, ¿a qué altura está la cometa sobre el suelo?

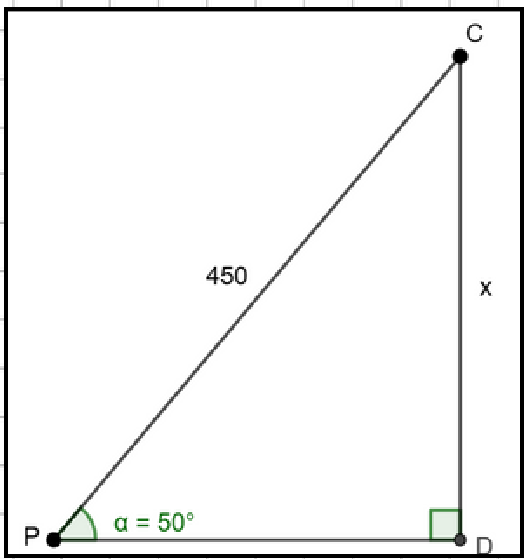
RESOLUCIÓN

1 COMPRENDER EL PROBLEMA

A partir de la lectura del problema, comenzamos identificamos los siguientes datos importantes:

- La longitud de la cuerda es de 450 pies.
- El ángulo entre la cuerda y el suelo es de 50°.

Realizando un esquema de la situación:



Donde:

- **P**: representa el lugar en la playa donde el hombre sostiene el extremo de la cuerda de la cometa, al nivel del suelo.
- **C**: representa la posición de la cometa en el aire.
- Segmento **PC**: es la cuerda de la cometa, que mide **450 pies** de largo.
- **α**: es el ángulo de elevación de la cuerda con respecto al suelo. Esto significa que la cuerda forma un ángulo de 50° con el suelo en el punto **P.**
- **D**: es el punto en el suelo directamente debajo de la cometa, formando un ángulo recto (90°) con el segmento **CD**, que representa **la altura de la cometa** sobre el suelo.

Incógnita:

Además de los datos, podemos identificar la incógnita del problema, a partir de la pregunta que aparece al final del enunciado. En este caso, la incógnita representa la altura de la cometa sobre el nivel del suelo. Por lo tanto, vamos a denotar a la misma con la letra **x.**

x: altura de la cometa a nivel del suelo

2 CONCEBIR UN PLAN

Para resolver este problema, observamos que se forma un triángulo rectángulo, donde:

- La cuerda (450 pies) es la ***hipotenusa***.
- La altura de la cometa sobre el suelo es el ***cateto opuesto*** al ángulo de elevación (50°).
- La base del triángulo (***cateto adyacente***) es la distancia en el suelo desde el punto donde está el hombre hasta el punto justo debajo de la cometa.

Nos están pidiendo **calcular la altura de la cometa sobre el suelo**, que corresponde al cateto opuesto al ángulo de 50°.

Entonces, para elegir la razón trigonométrica correcta, recordemos las definiciones de las razones que relacionan los lados de un triángulo rectángulo.

$$sin\,(\alpha) = \frac{cat.\,opuesto}{hipotenusa}$$

$$cos\,(\alpha) = \frac{cat.\,adyacente}{hipotenusa}$$

$$tan\,(\alpha) = \frac{cat.\,opuesto}{cat.\,adyacente}$$

Para este problema, conocemos:

- La hipotenusa (**que mide 450 pies**).
- Queremos encontrar el cateto opuesto al ángulo **α** (la altura de la cometa).

Por lo tanto, la razón trigonométrica que relaciona el *cateto opuesto* del ángulo **α** con la *hipotenusa* del tríángulo es el seno.

$$sin\,(\alpha) = \frac{cat.\,opuesto}{hipotenusa}$$

3 EJECUTAR EL PLAN

Como siguiente paso, es resolver la función sen α, reemplazando los datos identificados anteriormente.

$$sin\left(\alpha\right)=\frac{cat.opuesto}{hipotenusa}$$

$$sin\left(50\right)=\frac{x}{450}$$

Luego, multiplicamos por 450 en ambos miembros:

$$450.sin\left(50\right)=\frac{x}{450}450$$

De esta forma resulta que:

$$450.sin\left(50\right)=x$$

Resolvemos la multiplicación y obtenemos:

$$344,72\approx x$$

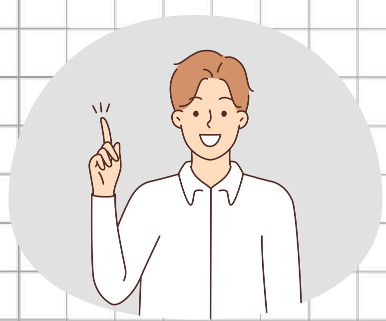
4 EXAMINAR LA SOLUCIÓN OBTENIDA

Por último, verificaremos si la solución que hemos considerado para responder la pregunta es correcta.

La cuerda mide 450 pies y forma un ángulo de 50° con el suelo, por lo que esperamos que la altura de la cometa sea menor que la longitud de la cuerda. El resultado de 344.72 pies es menor que 450 pies, lo cual tiene sentido

Finalmente, podemos decir:

<u>Respuesta</u>: La altura de la cometa sobre el suelo es aproximadamente 344,72 pies.



CONCLUSIÓN

La resolución de problemas es una habilidad fundamental en el aprendizaje de las matemáticas, y este material busca fortalecerla a través del Método Polya. Al seguir este proceso estructurado, podrás abordar problemas con mayor claridad, mejorar tu razonamiento lógico y desarrollar una actitud crítica y reflexiva frente a los desafíos matemáticos.

Además, la práctica constante con los problemas aquí presentados no solo te ayudará a consolidar los contenidos aprendidos a lo largo del curso, sino que también te preparará para enfrentar el examen de ingreso de matemáticas con mayor confianza y estrategias efectivas.

En última instancia, este material no solo tiene el propósito de enseñarte matemáticas, sino también de ayudarte a convertirte en un pensador independiente, capaz de aplicar los principios aprendidos de manera creativa y eficaz en diversos contextos. *¡Tu esfuerzo hoy te abrirá puertas hacia el éxito académico y personal!*